無限次元問題(積分方程式)の解に対する存在保証(精度保証付き数値計算法とその応用)

鈴木, 千里

数理解析研究所講究録
831巻 1993年 96-111

無限次元問題(積分方程式)の解に対する存在保証

静岡理工科大学　鈴木千里 (*Chisato Suzuki*)

§1. はじめに

解の存在保証がなされていない無限次元の非線形関数方程式では，解の存在証明そのものがしばしば難しい.

本資料では，離散化によって得られる無限の方程式の列に対して，集合的にそれらの方程式の可解性(全可解性)を議論し，数値解と共に元の問題の解の存在の検証を与える方法について，特に，非線形積分方程式(*Hammerstein* 方程式)を対象に議論する.

§2. 動機

*Hammerstein*方程式

$$(2.1)\qquad u(x) = \int_{-1}^{1} K(x, s)f(s, u(s))ds + h(x) = T(u)(x)$$

に対して

(i) $K(x,s)$は $I\times I$ ($I=[-1, 1]$) 上の *Riemann*可積分関数

(ii) $f(x, z)$ は $I\times R^1$上で定義された(一般に zに関して非線形な)連続関数でつぎを満たす：I 上の任意の *Riemann*可積分関数 $u(x)$, $v(x)$ に対して，適当な I 上の正値連続関数 $g(x)$ が存在して

$$|f(x, u(x))-f(x, v(x))| \leq g(x)|u(x)-v(x)| \qquad (x\in I)$$

が成立する.

(iii) $h(x)$は I 上の *Riemann*可積分関数

を仮定して，つぎの結果を論文1)で示した.

【1】 *Riemann* 可積分関数空間 $R(I)$ 上の写像

$$(2.2)\qquad T_n^c(u)(x)=\Phi_n(\pi_n u)(x) + h(x), \quad \text{for } u\in R(I), \quad n\geq 1$$

の不動点 $u_n(x)$ $(n \geqq 2)$ が存在するとき，適当な部分列 $\{\ u_m(x)\ \}$ があって，つぎが成立する．

(a) $u_m(x)$ は *Hammerstein*方程式を殆ど到る所で満足する解 $u^*(x)$ に L_2 収束する．（⇦定理２，定理３）

(b) $u_m^* = T(u_m)(x)$は *Hammerstein*方程式を到る所で満足する解 $u^*(x)$ に一様収束する．（⇦定理４）

ここで，

Φ_n ：n 次元ベクトル $u^n \in R^n$を補間する作用素で，*Hammerstein* 方程式の積分部分の近似に相当する．

π_n ：関数 $u(x)$ ($x \in I$) の n 次元ベクトル空間への射影；

$\pi_n u(x) = (u(x_1), ..., u(x_n))^T \equiv u^n \in R^n \qquad (x_i \in \Pi_n)$

Π_n ：選点と呼び，n 次 *Legendre* 多項式の n 個のゼロ点の集合；

$\Pi_n = \{ x_1, x_2, ..., x_n \}$

【２】 写像 T_n^c が不動点を持つための必要十分条件は R^n上の写像

(2.3) $T_n^d(u^n) = \pi_n(\ \Phi_n(u^n) + h\ ), \qquad (u^n = (u_1, ..., u_n) \in R^n)$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} K(x_i,\ x_j) w_j f(\ x_j,\ u_j) + h(x_i) \right]$$

が不動点をもつことである．（⇦定理１）

ここで，$\{\ w_j\ \}$ はΠ_n上に標本点をもつ *Legendre-Gauss* 積分公式の重み係数である．

これらの結果から，つぎのことが主張できる：

『【２】によって，もし T_n^d ($n \geqq 1$) の不動点の存在証明が示されれば，【１】の下線部分に提示された前提「 $u_n(x)$ $(n \geqq 1)$ の存在」は仮定でなくなり，(a)及び(b)の命題は真となる．すなわち，*Hammerstein* 方程式の厳密解の存在が保証されることになる．』

注）① T_n^c，T_n^d をそれぞれ T の連続近似写像，離散近似写像という．

② T_n^c の不動点を T の不動点（又は*Hammerstein*方程式）の連続近似解という．

③ T_n^d の不動点を T の不動点（又は*Hammerstein*方程式）の離散近似解という．

本資料では，*Hammerstein* 方程式の $K(x, s)$と $f(s, z)$に対して解析性を仮定し，さらに適宜適当な制限のもとで，T_n^d $(n \geqq 1)$ の不動点方程式の系の解の存在を集合的に論ずる．なお，これらの議論において，方程式

(2.4) $\qquad G(x) = 0 \qquad (G : R^n \rightarrow R^n)$

に対する *Newton* 法における *Kantrovic*の定理が本質的な役割を果たす．すなわち方程式（2.4）に対する *Newton* 過程

$$G'(U^k)\Delta^k = -G(U^k),\ k = 0, 1, 2, ...$$
$$U^{k+1} = U^k + \Delta^k$$

対するつぎの定理である．

【 Kantrovicの定理〔L.B. Rall （2，定理22.4）〕】 $G(Z)$ が出発値 U^0 の閉近傍

（2.5）　　$N(U^0 : \delta) = \{ Z \in R^n : \| Z - U^0 \| \leqq \delta \}$

において2階連続微分可能であって

（2.6）　　$\| G''(Z) \| \leqq K$

が成立するような定数 $0 < K < \infty$ が存在して，$G(U^0)$ の Jacobi 行列の逆 $G'^{-1}(U^0)$ に対して

（2.7）　　$\| G'^{-1}(U^0) \| \leqq B$

なる定数 $0 < B < \infty$ が存在して

（2.8）　　$h \equiv B\eta K \leqq ½$

（2.9）　　$\delta \geqq \delta' \equiv \dfrac{(1 - \sqrt{1 - 2h})}{h} \eta$

であれば，$G(U^*) = 0$ を満たす解 $U^* \in N(U^0 : \delta')$ が存在し，Newton 過程は U^* に収束する．ただし，η はつぎを満たす．

$$\| \Delta^0 \| = \| U^1 - U^0 \| = \| G'^{-1}(U^0) G(U^0) \| \leqq \eta \quad \square$$

§3. 方程式列の集合的可解性

つぎは解を持つ方程式の列に対する名称を定めるものである．

$G_n : R^n \to R^n$ $(n \geqq 1)$ を写像とし，その列を

$$S = \{ G_n \mid n \geqq 1 \}$$

とする．S が全可解であるとは，高々有限個を除いて各 n（$\geqq 1$）に対し，方程式

$$G_n(x) = 0 \quad (x \in R^n)$$

が解を持つことである．

【定理1】つぎの（1）と（2）は写像の列 $S = \{ G_n \mid n \geqq 1 \}$ が全可解であるための十分な条件であり，（1）と（2）が満たされるとき，各のG_n $(n \geqq m)$ の方程式

（3.1）　　$G_n(x^*) = 0$

を満たす解 x^*は $N_n(v^n, r_m)$ の中に存在する．

（1）各 G_n は2階連続微分可能である．

（2）あるベクトルの列 $\{ v^n \in R^n \mid n \geqq 1 \}$ と整数 $m \geqq 1$ があって，任意の $n \geqq m$ に対して

i）適当な定数 $r > 0, K > 0$ が存在して，任意の $z^n \in N_n(v^n, r)$に対して，つぎが成立する．

$$\| G_n''(z^n) \| \leqq K$$

ただし $N_n(v^n, r)$は v^n の閉近傍である；

$$N_n(v^n, r) = \{ z \in R^n \mid \| z - v^n \| \leqq r \}$$

ii）適当な定数 $B > 0$ が存在して

$$\| G_n'^{-1}(v^n) \| \leqq B$$

が成立する．

iii）各 $n \geqq m$ に対して

$$\| G_n'^{-1}(v^n)\, G_n(v^n) \| \leqq \eta_n$$

が成立するような単調減少の数列 $\eta_m \geqq \eta_{m+1} \geqq \cdots\cdots \geqq \eta_n \geqq \cdots\cdots$ があって，つぎが成立する；

(a) $h_m = \mathrm{K} B \eta_m \leqq 1/2$

(b) $r_m = \dfrac{1-\sqrt{1-2h_m}}{h_m}\eta_m \leqq r$

【証明】すべての $n \geqq m$ に対して，方程式

$$G_n(x) = 0, \quad (x \in R^n)$$

が解をもつことは *Newton* 法に関する *Kantrovic* の定理からいえる．実際，任意の $n \geqq m$ に対して，ベクトル v^n を出発値とす *Newton* 過程では仮定（*1*-ⅰ，*1*-ⅱ）により n に依存することなく

$$\| G_n''(z^n) \| \leqq \mathrm{K}, \quad (z^n \in N_n(v^n, r))$$

$$\| G_n'^{-1}(v^n) \| \leqq B,$$

なる定数 $\mathrm{K} > 0$，$B > 0$ がある．したがって，*Kantrovic* の定理の適用にあたっては，任意の $n \geqq m$ について不等関係式（2.8）と（2.9）を満たしていることを検証すれば十分である．まず $n = m$ の場合には（*1*-ⅲ）(a)，(b)により，明らかに *Kantrovic*の定理の前提は満たされる．したがって $G_m(x^*) = 0$ を満たす解

$$x^* \in N_m(v^m, r_m)$$

は存在する．

つぎに $n > m$ の場合について考える．仮定により η_n は n に関して単調減少であることから，h_n も単調減少である．したがって，すべての $n \geqq m$ に対して

$$h_n \leqq h_m \leqq 1/2$$

が成立する．また同様に r_n も n に関して単調減少であることから

$$r_n \leqq r_m \leqq r$$

が成立する．したがって任意の $n \geqq m$ の場合も，*Kantrovic*の定理の前提は満たされ，各 n に対し $G_n(x^*) = 0$ を満たす解 $x^* \in N_n(v^n, r_n)$ が存在する．そのとき

$$N_n(v^n, r_n) \subset N_n(v^n, r_m)$$

であることから，$x^* \in N_n(v^n, r_m)$ が言える．□

§4. 定理１の適用への問題の定式化

選点 $\Pi_m = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ 上の連続近似解 $u_m(x)$（すなわち離散近似 u^m ）の存在を仮定して，任意の n（$> m$）の選点 $\Pi_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 上の連続近似解 $u_n(x)$（すなわち離散近似解 u^n ）の存在を定理１にもとづき議論する．

定理１のベクトル列 $\{ v^n \in R^n \}$ に該当するものを

（4.1）　$v^n = \pi_n u_n(x) = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T$

によって構成する．さらに，Π_n 上の離散近似写像 $T_n{}^d$ の不動点方程式をもとに，写像の列 $\{ G_n \}$ をつぎによって構成する．各 $n > 2$ に対して

（4.2）　$G_n(u^n) = u^n - T_n{}^d(u^n), \quad (u^n \in R^n)$

$\qquad\qquad = u^n - K_n W_n f(u^n) - h$

ここで

$$u^n = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$$
$$W_n = diag(w_1, w_2, \ldots, w_n)$$
$$f(u^n) = (f_n(x_i, u_i))^T \quad (1 \leqq i \leqq n)$$
$$K_n = (K_{ij}) \quad (1 \leqq i, j \leqq n) \qquad K_{ij} = K(x_i, x_j),$$
$$h = (h_i)^T \quad (1 \leqq i \leqq n) \qquad h_i = h(x_i)$$

式（4.2）のより成分による表現はつぎの通りである．

$$G_n(u^n) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & \cdots & K_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{n1} & \cdots & K_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & & & \\ & w_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \\ & & & w_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x_1, u_1) \\ f_2(x_2, u_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x_n, u_n) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ h_n \end{pmatrix}$$

明らかに，写像（4.2）の方程式

（4.3）　$G_n(u^n) = 0$

に解があれば，その解はΠ_n上の離散近似解を与える．

上で構成した写像の列 $\{G_n\}$ の全可解性を論ずるにあたり，*Hammerstein* 方程式のクラスを制限しておく．まず，最初の制限はつぎである．

（iv） *Hammerstein*方程式の積分核 $K(x,s)$ および関数 $f(x,z)$ は解析的である．

さらに若干の制限を設ける．その制限とは，積分核の対称性のような性質と $f(x,z)$ の z に関する導関数に対する性質についてである．すなわち，つぎの２つのケースについて考察する．

【ケース１】つぎを仮定する．

（v） $K(x,s)$ は反対称関数； $K(x,s) = -K(s,x)$ ($(x,s) \in I \times I$)

（vi） $f(u)$の *Jacobi* 行列 $F(u) = (F_{ij})$ の成分は任意の $u \in R^n$ に対して，すべて正（または負）とする．ここでは便宜的に $F_{ij} > 0$ ($0 \leqq i, j \leqq n$) としておく．ここで F_{ij}は $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T \in R^n$ に対し

$$F_{ij} = \delta_{ij} \frac{\partial f_i(x_i, u_i)}{\partial u_i}, \quad (0 \leqq i, j \leqq n).$$

となる．

【ケース２】つぎを仮定する．

（v） $K(x,s)$は正（負）値の対称関数；$K(x,s) = K(s,x) > 0$ (<0) $((x,s) \in I \times I)$

（vi） $f(u)$の *Jacobi* 行列 $F(u) = (F_{ij})$ の成分は任意の $u \in R^n$ に対して，すべて $K(x,s)$ と異符号を取る．

定理１の適用にあたっては

① $\| G_n'^{-1}(v^n) \|$,

② 適当な領域 ($z^n \in$) $D_n \subset R^n$ において，$\| G_n''(z^n) \|$,

③ $\| G_n'^{-1}(v^n) G_n(v^n) \|$

の評価が必要になる．つづく節ではこれらの評価を求めることが主題となる．

§5. $\| G_n'^{-1}(v^n) \|$ の評価

ここでは，G_n（ $n \geqq 1$ ）のJacobi行列の逆 $G_n'^{-1}(v^n)$ の評価を与える．

初めに，【ケース１】について考える．すなわち積分核 $K(x,s)$ が

（5.１）　$K(x,s) = -K(s,x)$ （ $(x,s) \in I \times I$ ）

を満たし，$f(x,z)$の z に関する Jacobi 行列 $F(z) = (F_{ij})$ が

（5.２）　$\forall z \in R^n$ に対して，$F_{ij} > 0$ （ $1 \leqq i, j \leqq n$ ）

を満たす場合について考察する．

式（5.１）から，$K(x,x)=0$ が成立するので，（4.２）式の行列 K_nは反対称的である．すなわち，つぎが成立する．

（5.３）　$(K_n)^T = -K_n$

また仮定（5.２）により，$W_nF(z)$は正定値対角行列である．したがって

$$W_nF(z) = PP$$

が成り立つような正定値対角行列 P がある．これらの事実から，$G_n(z)$の Jacobi 行列 $G_n'(z) = I - K_nW_nF(z)$ は

$$G_n'(z) = I - K_nPP = P^{-1}(I - PK_nP)P$$

のように変形できる．この変形において PK_nP は（5.３）により

$$(PK_nP)^T = -PK_nP$$

が成立し，反対称行列であることがわかる．なお $PK_nP = (L_{ij})$ とすれば，L_{ij}は

$$L_{ij} = \sqrt{w_iF_{ii}}K_{ij}\sqrt{w_jF_{jj}},$$

となる．

良く知られるように反対称行列は純虚数の固有値のみをもつことから，PK_nPの固有値は純虚数である．いまそれを $i\alpha_j$（ $j=1,2,...,n$ ）とすれば，$G_n'(z)$の固有値はすべて $1-i\alpha_j$ $(j=1,2,...,n)$ の形に書ける．ここで，i は虚数単位である．したがって，任意の $z \in R^n$に対して $G_n'(z)$の逆は存在して，そのノルムは $G_n'(z)$の絶対最小固有値の逆数で評価できる．したがって，つぎの評価を得る．

（5.４）　$$\| G_n'^{-1}(z) \| \leqq \frac{1}{\displaystyle\min_{1 \leqq j \leqq n} |1 + i\alpha_j|} \leqq 1 \equiv B$$

つぎに，【ケース２】について考える．すなわち積分核 $K(x,s)$ が

$$K(x,s) = K(s,x) > 0 \quad ((x,s) \in I \times I)$$

を満たし，$f(x,z)$の z に関する Jacobi 行列 $F(z) = (F_{ij})$ が

任意の $z \in R^n$ に対して，$F_{ij} < 0$ （ $1 \leqq i, j \leqq n$ ）

を満たす場合について考えれば十分である．

仮定により，行列 K_n の成分はすべて正であり，また行列$-W_nF(Z)$は正定値な対角行列となることから $G_n(z)$ の Jacobi 行列

$$G_n'(z) = I - K_nW_nF(z) \equiv (J_{ij})$$

の成分はすべて正となる；

$$J_{ij} = \delta_{ij} + w_iK_{ij}|F_{jj}| > 0$$

このようなすべての成分が正値であるような行列は正値行列と呼ばれ，つぎの定理で示される性質をもつ．

【補題〔*Varga* 3），（補題2.5)〕】 $n \times n$ 行列 $A=(a_{ij})$ が既約であり，且つ正値でであれば，A のスペクトル半径 $\rho(A)$ に対して

(a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \rho(A),\quad (1 \leqq i \leqq n)$

が成立するか，または

(b) $\displaystyle\min_{1 \leqq i \leqq n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right\} < \rho(A) < \max_{1 \leqq i \leqq n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right\}$

のいずれかが成立する．□

Jacobi 行列 $G_n'(z)$は任意の $z \in R^n$ に対して既約であり，かつ正値であることから，この補題を用いて，つぎの結果を得る．

$$1 + \min_{1 \leqq i \leqq n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} w_i K_{ij} \mid J_{jj} \mid \right\} < \rho(G_n'(z))$$

$$1 + \max_{1 \leqq i \leqq n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} w_i K_{ij} \mid J_{jj} \mid \right\} > \rho(G_n'(z))$$

したがって，ノルムとスペクトル半径との関係により，つぎの評価を得る．

$$(5.5)\quad \| G_n'^{-1}(z) \| \leqq \frac{1}{1 + \min_{1 \leqq i \leqq n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} w_i K_{ij} \mid F_{jj} \mid \right\}} \leqq 1 \equiv B$$

ここで $z \in R^n$ は任意である．

本節の結論として，$\| G_n'^{-1}(z) \|$ の評価はケース１およびケース２の両方とも同じ結果となり，今後両ケースを区別することなく議論できる．そして，$z = v^m$ とするとき，定理１の条件（1-ii）は

$$(5.6)\quad \| G_n'^{-1}(v^m) \| \leqq 1 \equiv B$$

により満たされることがわかる．

§6. $\| G_n''(z) \|$ の 評 価

ここでは G_n の２次導関数である $G_n''(z)$の評価について考える．

まず，この評価をどのような領域で行えば良いのかを考える．いま，離散近似写像 $T_n{}^d$（$n \geqq 1$）の不動点（すなわち離散近似解）が存在するとすれば，その解のノルムの上限が分かれば，必要な領域を特定することができる．そこで，そのような上限の評価を与えることにする．$T_n{}^d$ の離散近似解 $u^n = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T \in R^n$ があるとすれば，u^n は

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} w_j K_{ij} f(x_j, u_j) + h_i,\quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

を満たす．上式の $f(x_j, u_j)$ に平均値の定理を適用すれば

$$f(x_j, u_j) = f(x_j, 0) + f_u(x_j, u_j^*) u_j$$

が得られので，これを代入して

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} w_j K_{ij} f(x_j, u_j^*) u_j + \sum_{j=1}^{n} w_j K_{ij} f(x_j, 0) + h_i$$

を得る．ただし u_i^* はゼロと u_i の間の適当な点である．上式をベクトル表現すればつぎのように書ける．

$$(I - K_n W_n F(u^*)) u^n = K_n W_n f(0) + h$$

あるいは

$$G_n'(u^*) u^n = K_n W_n f(0) + h$$

ただし，　$u^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*)^T$

$$f(0) = (f(x_1, 0), f(x_2, 0), \ldots, f(x_n, 0))^T$$

このとき，$G_n'(u^*)$が可逆的であれば

$$u^n = G_n'^{-1}(u^*) [K_n W_n f(0) + h]$$

が得られ，つぎの評価を得る．

$$\| u^n \| \leqq \| G_n'^{-1}(u^*) \| \{ 2\|K\| \|f(0)\| + \|h\| \}$$

したがって，$K(x,s)$，$f(x,z)$に対する仮定（ⅴ），（ⅵ）があるときには，前節で評価したように，n に依存することなく $\| G_n'^{-1}(u^*) \| \leqq 1$ と評価できことから

（6.1）　$\| u^n \| \leqq 2\|K\| \|f(0)\| + \|h\|$

を得られる．いま，定理1の条件（2-ⅰ）における r を

（6.2）　$r \equiv 2\|K\| \|f(0)\| + \|h\|$

と定め，領域 D_n を

$$D_n = \{ z^n \in R^n \mid \| z^n \| \leqq 2r \}$$

と定めれば，つねに

$$N_n(v^n, r) \subset D_n, \quad (n \geqq 1)$$

が成立する．したがって，D_n 上で $\| G_n''(z^n) \|$ の評価は $N_n(v^n, r)$の評価にも使える．

さて，D_n上での $G_n''(z^n)$ のノルムは文献4）で用いた方法と全く同じようにして評価することができる．すなわち，$z^n = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in D_n$ に対し

$$\| G_n''(z^n) \| \leqq \sup_{1 \leqq i \leqq n} \sum_{j=1}^{n} \left| K_{ij} w_j \frac{\partial^2 f(x_j, z_j)}{\partial z_j^2} \right|$$

が成立する．したがっ，任意の $z^n \in D_n$ に対して，つぎの評価を得る．

（6.3）　$\| G_n''(z^n) \| \leqq 2\|K\| \max_{x \in I} \max_{|y| \leqq 2r} \left| \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \right|$

この結果にもとづき，定理1の条件（2-ⅰ）における定数Kを

（6.4）　$K \equiv 2\|K\| \max_{x \in I} \max_{|y| \leqq 2r} \left| \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \right|$

と定めれば，定理1の条件（2-ⅰ）は満たされる．

§7. $\| G_n'^{-1}(v^n)G_n(v^n) \|$ の評価

ここでは Π_m 上の連続近似解 $u_m(x)$ を射影 π_n で写して得られる n次元ベクトル

$$v = \pi_n u_m(x) = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T \in R^n$$

を出発値にして，方程式

$$G_n(u) = 0, \quad (u \in R^n)$$

に対する Newton 過程の初回反復値 u と出発値 v との差

(7.1) $$\Delta^0 \equiv u - v = -G_n'^{-1}(v)G_n(v)$$

のノルムを評価する．なお，$n > m$ とする．

以下の議論では記号の簡便化のために，Π_m 上の連続近似解 $u_m(x)$ を表すのに単に $v(x)$ と表すことにする；$v(x) \equiv u_m(x)$． $v(x)$を Hammerstein方程式（2.1）に代入することによって残差 $r_m(x)$ が

(7.2) $$v(x) - \int_{-1}^{1} K(x, s)f(x, v(s))ds - h(x) = r_m(x)$$

によって得られる．この残差はつぎのように変形することができる（文献1）．

(7.3) $$r_m(x) = A(x) + B(x) + C(x)$$

ここで

$$A(x) = -\int_{-1}^{1} K_m(x, s)\, R_m(f(v))(s)ds,$$

$$B(x) = -\int_{-1}^{1} R_m(K)(x,s)f_m(v)(s)ds$$

$$C(x) = -\int_{-1}^{1} R_m(f(v))(s)R_m(K)(x,s)ds,$$

ただし

$$\begin{aligned}
R_m(f(v))(s) &= f(s,v(s)) - L_m(f)(s),\\
R_m(K)(x, s) &= K(x, s) - L_m(K(x,\cdot))(s),\\
f_m(v)(s) &= L_m(f(v)(\cdot))(x),\\
K_m(x, s) &= L_m(L_m(K(\cdot,\cdot)))(x, s).
\end{aligned}$$

なお，L_m はΠ_m上の Lagrange 補間作用素である．

$A(x)$，$B(x)$，$C(x)$はいずれも Schwarz不等式を用いて容易に評価できる．

$$|A(x)| \leq \left[\int_{-1}^{1} K_m(x,s)^2 ds \int_{-1}^{1} R_m(f(v)(s))^2 ds \right]^{1/2}$$

（付録A，C参照）

$$\leq 2\sqrt{m}\, M_m \|K\| \, \|f_x(v)^{(m)}\|$$

$$|B(x)| \leq \left[\int_{-1}^{1} R_m(K)(x,s)^2 ds \int_{-1}^{1} f_m(v)(s)^2 ds \right]^{1/2}$$

（付録B，D参照）

$$\leq \sqrt{2}\,(1 + \sqrt{m})\, M_m \|f(v)\| \, \{ \|K_x^{(m)}\| + \|K_s^{(m)}\| \}$$

$$|C(x)| \leqq \left[\int_{-1}^{1} R_m(f(v))(s)^2 ds \int_{-1}^{1} R_m(K)(x,s)^2 ds \right]^{1/2}$$ （付録C，B参照）

$$\leqq \sqrt{2}\,[1+\sqrt{m}\,]\, M_m^2 \| f_x(v)^{(m)} \| \; \{ \| K_x^{(m)} \| + \| K_s^{(m)} \| \}$$

ただし

$$\| K_x^{(m)} \| = \max_{x\in I} \max_{s\in I} | K_x^{(m)}(x,s) |$$

$$\| K_s^{(m)} \| = \max_{x\in I} \max_{s\in I} | K_s^{(m)}(x,s) |$$

$$\| f(v) \| = \max_{x\in I} | f(x,v(x)) |$$

$$\| f_x(v)^{(m)} \| = \max_{x\in I} | f_x^{(m)}(x,v(x)) |$$

（7. 4） $$M_m = \frac{2^m\, m!}{(2m!)} \leqq \frac{\sqrt{2\pi}}{2^m\, m!}$$

定数 M_m の右辺の導出にはつぎの *Wallis* の公式を用いた．最後に任意の$x\in[-1,\ 1]$に対して次の残差の評価を得る．

$$| r_m(x) | \leqq 2\sqrt{m}\, M_m \| K \| \, \| f_x(v)^{(m)} \| + \sqrt{2}\,[1+\sqrt{m}\,]\, M_m$$
$$\times \{ \| f(v) \| + M_m \| f_x(v)^{(m)} \| \} \; \{ \| K_x^{(m)} \| + \| K_s^{(m)} \| \}$$

つぎに，（7. 2）式の積分をΠ_n上の *Legendre-Gauss* の積分則で離散化すると

（7. 5） $$v(x) - \sum_{j=1}^{n} w_j K(x, x_j) f(x_j, v(x_j)) - h(x) = r_m(x) + E_n(Kf)(x)$$

が得られる．ここで E_n は *Legendre-Gauss* の積分則の誤差である：

$$E_n(Kf)(x) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)(2n!)^3} \frac{\partial^{2n} K(x,s) f(s,v(s))}{\partial s^{2n}} \Big|_{s=\xi} \quad (|\xi| < 1)$$

この誤差を評価すれば

$$| E_n(Kf)(x) | \leqq \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)(2n!)^3} \max_{s\in I} \left| \frac{\partial^{2n}}{\partial s^{2n}} K(x,s) f(s,v(s)) \right|$$
$$\leqq \mu_n \| (Kf)^{(2n)} \|$$

が得られる．ここで

$$\| (Kf)^{(2n)} \| = \max_{x\in I} \max_{s\in I} \left| \frac{\partial^{2n}}{\partial s^{2n}} K(x,s) f(s,v(s)) \right|$$

（7. 6） $$\mu_n = \pi / [(2n+1) 2^{2n-1} (2n!)]$$

なおμ_nは *Wallis* の公式により得た．いま（7. 5）式の x をΠ_n上で離散化すると

$$G_n(v) = \begin{pmatrix} r_m(x_1) + E_n(Kf)(x_1) \\ r_m(x_2) + E_n(Kf)(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ r_m(x_n) + E_n(Kf)(x_n) \end{pmatrix}$$

が得られることから，上で求めた残差と誤差の評価を利用して，$\| G_n \|$に対するつぎの評価が得られる．

$$\| G_n \| \leqq \sup_{1\leqq i\leqq n} | r_m(x_i) | + \sup_{1\leqq i\leqq n} | E_n(Kf)(x_i) |$$
$$\leqq \max_{x\in I} | r_m(x) | + \max_{x\in I} | E_n(Kf)(x) | \leqq \mathrm{H}_{m,n}$$

ただし

$$\mathrm{H}_{m,n} = 2\sqrt{m}\, M_m \| K \| \| f_x(v)^{(m)} \| + \sqrt{2}\,[\, 1+\sqrt{m}\,]\, M_m$$
$$(7.7)\qquad \times \{ \| f(v) \| + M_m \| f_x(v)^{(m)} \| \} \{ \| K_x^{(m)} \| + \| K_s^{(m)} \| \}$$
$$+ \mu_n \| (Kf)^{(2n)} \|$$

結局，$\| \Delta^0 \|$の評価は（7. 1）式より

$$(7.8)\qquad \| \Delta^0 \| = \| u-v \| = \| G_n'^{-1}(v)G_n(v) \|$$
$$\leqq \| G_n'^{-1}(v) \| \| G_n(v) \|$$
$$\leqq \| G_n'^{-1}(v) \| \mathrm{H}_{m,n}$$

として得られる．さらに，5節の$\| G_n'^{-1}(v) \|$に対する評価結果（5. 6）用いるとつぎの評価が得られる．

$$(7.9)\qquad \| G_n'^{-1}(v)G_n(v) \| \leqq \mathrm{H}_{m,n}$$

§8. 高次導関数の評価

前節で得られた$\| G_n'^{-1}(v) \|$の評価を計算するためには，$K(x,s)$や$f(x,v(x))$さらには$K(x,s)f(s,v(s))$などの高階の導関数の評価が必要となる．ここではこれらの関数の解析性を利用して，その評価の仕方について述べる．

いま$K(x,z)$，$f(z,v(z))$が複素平面上の原点を中心に半径$R=2$の円周Cを含む適当な領域Dで解析的であるとすれば，Cauchyの積分表示を用いることで$K_x^{(m)}(x,s)$と$f_x^{(m)}(x,v(x))$はつぎのように表すことができる．

$$(8.1)\qquad K_x^{(m)}(x,s) = \frac{m!}{2\pi i}\int_C \frac{K(z,s)}{(z-x)^{m+1}}\,dz, \qquad (x\in I=[-1,1])$$

$$(8.2)\qquad f_x^{(m)}(x,v(x)) = \frac{m!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z,v(z))}{(z-x)^{m+1}}\,dz, \qquad (x\in I=[-1,1])$$

ただし，iは虚数単位である．

まず（8. 1）式から，つぎの評価が得られる．

$$| K_x^{(m)}(x,s) | \leqq \frac{m!}{2\pi}\int_C \frac{| K(z,s) |}{| z-x |^{m+1}} | dz |$$
$$\leqq 2(m!) \max_{z\in C} | K(z,s) |$$

したがって，$\| K_x^{(m)} \|$の評価として，つぎを得る．

$$(8.3)\qquad \| K_x^{(m)} \| \leqq 2(m!) \max_{z\in C} \max_{s\in I} | K(z,s) | \equiv 2(m!) \| K \|_{C\times I}$$

つぎに（8. 2）式から，つぎの評価が得られる．

$$(8.4)\qquad | f_x^{(m)}(x,v(x)) | \leqq \frac{m!}{2\pi}\int_C \frac{| f(z,v(z)) |}{| z-s |^{m+1}} | dz |$$

$$\leqq 2(m!) \max_{z\in C} |f(z,v(z))|$$

さらに右辺には評価せねばならない $v(z)$ の項がある．しかし幸いにして $v(z)$ は多項式であることから容易に評価できる．いまC上の $v(z)$ の絶対最大値を P とすれば，領域 A を

$$A=\{ z=\text{複素数} \mid |z| \leqq P \}$$

と定義すれば，つぎの評価が得られる．

$$(8.5) \qquad \max_{z\in C} |f(z,v(z))| \leqq \max_{z\in C} \max_{w\in A} |f(z,w)| \equiv \|f\|_{C\times A}$$

したがって，（8.4）と（8.5）式から

$$(8.6) \qquad \| f_x(v)^{(m)} \| = \max_{x\in I} | f_x{}^{(m)}(x,v(x)) | \leqq 2(m!) \|f\|_{C\times A}$$

その他，$K(x,s)$と $K(x,s)f(s,v(s))$の s に関する高階の導関数の評価が必要となるがこれらも同様に評価することができる；まず，$K_s{}^{(m)}(x,s)$ の評価は

$$(8.7) \qquad \| K_s{}^{(m)} \| \leqq 2(m!) \max_{x\in I} \max_{z\in C} | K(x,z) | \equiv 2(m!) \|K\|_{I\times C}$$

によって与えられ，$K(x,s)f(s,v(s))$の s に関する$2n$階導関数の評価は

$$\begin{aligned}(8.8) \qquad \left| \frac{d^{2n}}{ds^{2n}}[K(x,s)f(s,v(s))] \right| &\leqq \frac{n!}{2\pi} \int_C \frac{| K(x,z)f(z,v(z)) |}{| z-s |^{2n+1}} |dz| \\ &\leqq 2(2n!) \max_{z\in C} | K(x,z)f(z,v(z)) | \\ &\leqq 2(2n!) \max_{z\in C} \max_{w\in A} | K(x,z)f(z,w) |\end{aligned}$$

から得られる．すなわち

$$\begin{aligned}(8.9) \qquad \| (Kf)^{(2n)} \| &= \max_{x\in I} \max_{s\in I} \left| \frac{d^{2n}}{ds^{2n}}[K(x,s)f(s,v(s))] \right| \\ &\leqq 2(2n!) \max_{x\in I} \max_{z\in C} \max_{w\in A} | K(x,z)f(z,w) | \\ &\leqq 2(2n!) \max_{x\in I} \max_{z\in C} | K(x,z) | \max_{z\in C} \max_{w\in A} | f(z,w) | \\ &= 2(2n!) \|K\|_{I\times C} \|f\|_{C\times A}\end{aligned}$$

§9. $\{G_n\}$ の全可解性の証明

前節の結果を用いると§7で求めた$\| G_n{}'^{-1}(v)G_n(v) \|$の評価$H_{m,n}$ は容易に計算可能な量で評価しなおすことができる．実際，（8.3，8.6，8.7，8.9）式および（7.4）式の M_m の評価と（7.6）式のμ_n を用いて，$H_{m,n}$ はつぎのように評価できる．

$$\begin{aligned} H_{m,n} \leqq{}& \frac{\sqrt{2m\pi}}{2^{m-2}} \|K\| \, \|f\|_{C\times A} + \frac{(1+\sqrt{m})\sqrt{\pi}}{2^{m-2}} [\|K\|_{C\times I} + \|K\|_{I\times C}] \\ &\times \left[\|f(v)\| + \frac{\sqrt{2\pi}}{2^{m-1}} \|f\|_{C\times A} \right] + \frac{\pi}{(2n+1)\, 2^{2n-2}} \|K\|_{I\times C} \|f\|_{C\times A}\end{aligned}$$

そこで（$1+\sqrt{m}$）$\leqq$ $2\sqrt{m}$ の関係を用いて，つぎを得る．

(9.1) $$H_{m,n} \leq \Gamma_{m,n} \equiv \frac{\sqrt{m}}{2^{m-2}}\beta + \frac{\sqrt{m}}{2^{2(m-2)}}\gamma + \frac{1}{(2n+1)\ 2^{2n-2}}\delta$$

ここで，β，γ，δは m，n に依存しないつぎに定義される量である．

(9.2) $$\beta = \sqrt{2\pi}\,[\,\|K\|\ \|f\|_{C\times A} + \sqrt{2}\,\|f(v)\|\ (\,\|K\|_{C\times I} + \|K\|_{I\times C}\,)\,]$$

(9.3) $$\gamma = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_{C\times A}\,(\,\|K\|_{C\times I} + \|K\|_{I\times C})$$

(9.4) $$\delta = \pi\,\|K\|_{I\times C}\,\|f\|_{C\times A}$$

これらは $K(x,s)$，$f(x,z)$ が解析的であれば有界である．

$\Gamma_{m,n}$ は m，n （ $n>m$ ）に関して単調減少する量である．いま，

(9.5) $$\eta_{m+s} = \Gamma_{m-1,\,m+s} \qquad (\ s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m\geqq 3\ )$$

を定義すれば，η_{m+s} は明らかに

(9.6) $$\eta_m > \eta_{m+1} > \eta_{m+2} > \cdots\cdots > \eta_{m+s} > \cdots\cdots$$

が成立し，十分おおきな m を取れば

(9.7) $$h_m \equiv \mathrm{K}B\eta_m \leqq \mathrm{K}\eta_m \leqq 1/2$$

(9.8) $$r_m = \frac{1-\sqrt{1-2h_m}}{h_m}\eta_m \leqq r$$

が成立する．ここで，

(9.9) $$r = 2\,\|K\|\ \|f(0)\| + \|h\|,\quad (f(0)=(f(x_1,0),\ldots,f(x_n,0))^T)$$

これにより，定理１の条件（2-iii）の(a), (b)を満たしていることがわかる．

なお，B は５節で示されたように $B\leqq 1$ であり，Ｋは６節の（6.3）式で示されたものである．すなわち

$$\mathrm{K} = 2\,\|K\|\ \max_{x\in I}\ \max_{|y|\leqq r}\left|\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right|.$$

以上によって，節４で設定した条件のもとで，$T_d{}^n$から構成される写像の列

$$\{\ G_n\ \mid\ G_n(u^n) = u^n - T_d{}^n(u^n),\ n\geqq 2\ \}$$

は定理１の十分条件をすべて満たすことから，全可解性が示された．□

参 考 文 献

1）鈴木千里：不動点方程式による非線形積分方程式の数値解法，情報処理学会論文誌，第31巻，第9号，1269-1279 (1990).

2）*Louis B. Rall: Computational Solution of Nonlinear Operator Equations, JOHN WILEY & SONS, INC, P.225 (1969).*

3）*Richard S. Varga: Matrix Iterative Analysis, Prentice-Hall, P.322(1962)*

4）鈴木千里：Ｍクラスの非非線形２点境界値問題における不動点法，情報処理学会論文誌，第28巻，第2号，139-146 (1987).

5）*P. J. Davis, P. Rabinowitz: Methods of Numerical Integration, Academic Press, P.459 (1975).*

【付録A】 $\left\{ \int_{-1}^{1} K_m(x,s)^2 ds \right\}^{1/2}$ の評価について：

$$\int_{-1}^{1} K_m(x,s)^2 ds = \int_{-1}^{1} \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \ell_i(x) \ell_j(s) K_{ij} \right]^2 ds$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{p=1}^{m} \ell_i(x) \ell_p(x) \left[\sum_{j=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} \int_{-1}^{1} \ell_j(s) \ell_q(s) ds K_{ij} K_{pq} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{p=1}^{m} \ell_i(x) \ell_p(x) \left[\sum_{j=1}^{m} w_j \; K_{ij} K_{pj} \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{m} w_j \left[\sum_{i=1}^{m} \ell_i(x) K_{ij} \right]^2$$

$$\leqq 2 \left(\Lambda_m \max_{x \in I} \max_{s \in I} |K(x,s)| \right)^2 \leqq 2m \|K\|^2$$

ただし $\Lambda_m = \max_{x \in I} \sum_{i=1}^{m} |\ell_i(x)| \leqq \sqrt{m}$, （Lebesgue定数）

【付録B】 $\left\{ \int_{-1}^{1} R_m(K)(x,s)^2 ds \right\}^{1/2}$ の評価について：

$R_m K(x,s) = K(x,s) - K_m(x,s)$ を変形し，つぎの恒等式を得る．

$$2 \left[K(x,s) - K_m(x,s)] \right]$$
$$= K(x,s) - L_m(K(\cdot,s))(x) + K(x,s) - L_m(K(x,\cdot))(s)$$
$$+ L_m(K(\cdot,s))(x) - K_m(x,s) + L_m(K(x,\cdot))(s) - K_m(x,s)$$

この式を｛・｝式中の被積分関数に代入して，三角不等式で評価すればつぎを得る．

$$\left\{ \int_{-1}^{1} R_m(K)(x,s)^2 ds \right\}^{1/2} \leqq \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left[K(x,s) - L_m(K(\cdot,s))(x) \right]^2 ds \right]^{1/2}$$
$$+ \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left[K(x,s) - L_m(K(x,\cdot))(s) \right]^2 ds \right]^{1/2}$$
$$+ \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left[L_m(K(\cdot,s))(x) - K_m(x,s) \right]^2 ds \right]^{1/2}$$
$$+ \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left[L_m(K(x,\cdot))(s) - K_m(x,s) \right]^2 ds \right]^{1/2}$$

以下では，上式の右辺の第１項から第４項までの積分の評価を順次与える：

第１項の評価：

$$\int_{-1}^{1} \left[K(x,s) - L_m(K(\cdot,s))(x) \right]^2 ds = \int_{-1}^{1} \left[K(x,s) - \sum_{i=1}^{m} \ell_i(x) K(x_i, s) \right]^2 ds$$

$$\leqq [M_m]^2 \int_{-1}^{1} K_x^{(m)}(\xi_1, s)^2 ds$$

$$\leqq 2 [M_m \| K_x^{(m)} \|]^2$$

第2項の評価：

$$\int_{-1}^{1} [K(x,s) - L_m(K(x,\cdot))(s)]^2 ds = \int_{-1}^{1} \left[K(x,s) - \sum_{j=1}^{m} \ell_j(s) K(x,x_j) \right]^2 ds$$

$$\leqq [M_m]^2 \int_{-1}^{1} K_s^{(m)}(x, \xi_2)^2 ds$$

$$\leqq 2 [M_m \| K_x^{(m)} \|]^2$$

第3項の評価：

$$\int_{-1}^{1} [L_m(K(\cdot,s))(x) - K_m(x,s)]^2 ds$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\sum_{i=1}^{m} \ell_i(x) K(x_i, s) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \ell_i(x) \ell_j(s) K(x_i, x_j) \right]^2 ds$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\sum_{i=1}^{m} \ell_i(x) \left\{ K(x_i, s) - \sum_{j=1}^{m} \ell_j(s) K(x_i, x_j) \right\} \right]^2 ds$$

$$\leqq [M_m]^2 \int_{-1}^{1} \left[\sum_{i=1}^{m} \ell_i(x) K_s^{(m)}(x_i, \xi_3) \right]^2 ds$$

$$\leqq 2 [M_m \Lambda_m \| K_s^{(m)} \|]^2 \leqq 2m [M_m \| K_s^{(m)} \|]^2$$

第4項の評価：

$$\int_{-1}^{1} [L_m(K(x,\cdot))(s) - K_m(x,s)]^2 ds$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\sum_{j=1}^{m} \ell_j(s) K(x,s_j) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \ell_i(x) \ell_j(s) K(x_i, x_j) \right]^2 ds$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\sum_{j=1}^{m} \ell_j(s) \left\{ K(x,s_j) - \sum_{i=1}^{m} \ell_i(x) K(x_i, x_j) \right\} \right]^2 ds$$

$$\leqq [M_m]^2 \int_{-1}^{1} \left[\sum_{j=1}^{m} \ell_j(x) K_s^{(m)}(x_i, \xi_3) \right]^2 ds$$

$$\leqq 2 [M_m \Lambda_m \| K_x^{(m)} \|]^2 \leqq 2m [M_m \| K_x^{(m)} \|]^2$$

ただし

$$\| K_x^{(m)} \| = \max_{x \in I} \max_{s \in I} | K_x^{(m)}(x,s) |$$

$$\| K_s^{(m)} \| = \max_{x \in I} \max_{s \in I} | K_s^{(m)}(x,s) |$$

$$M_m = \frac{2^m\ m!}{(2m)!} \leqq \frac{\sqrt{m\pi}}{2^m\ m!}$$

定数 M_m の右辺の導出には *Wallis* の公式を用いた．すなわち

$$\lim_{m\to\infty} \frac{2^{2m}(m!)^2}{\sqrt{2}\,(2m!)} = \sqrt{\pi}$$

結局，上の４つの評価を整理するとつぎが得られる．

$$\left\{ \int_{-1}^{1} R_m(K)(x,s)^2 ds \right\}^{1/2} \leqq [\ M_m \|\ K_x^{(m)} \|\ ] + [\ M_m \|\ K_s^{(m)} \|\ ]$$

$$+ [\sqrt{m}\ M_m \|\ K_s^{(m)} \|\ ] + [\sqrt{m}\ M_m \|\ K_x^{(m)} \|\ ]$$

$$= M_m\ [\ 1+\sqrt{m}\ ]\ \left\{ \|\ K_x^{(m)} \| + \|\ K_s^{(m)} \| \right\}$$

【付録Ｃ】 $\left\{ \int_{-1}^{1} R_m(f(v))(x,s)^2 ds \right\}^{1/2}$ の評価について：

$$\int_{-1}^{1} R_m(f(v))(x,s)^2 ds = [\ M_m\ ]^2 \int_{-1}^{1} [\ f^{(m)}(\xi, v(\xi))]^2 ds$$

$$\leqq 2\ [\ M_m\ \|\ f_x(v)^{(m)} \|\ ]^2$$

ただし，

$$\|\ f(v)^{(m)}\ \| \equiv \max_{x\in I}\ |\ f^{(m)}(x,v(x))\ |\ ]^2$$

【付録Ｄ】 $\left\{ \int_{-1}^{1} f_m(v)(s)^2 ds \right\}^{1/2}$ の評価について：

$$\int_{-1}^{1} f_m(v)(s)^2 ds = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i, v(x_i))^2$$

$$\leqq 2 \| f(v) \|^2$$

ただし，

$$\| f(v) \| \equiv \max_{x\in I}\ | f(x,v(x)) |$$